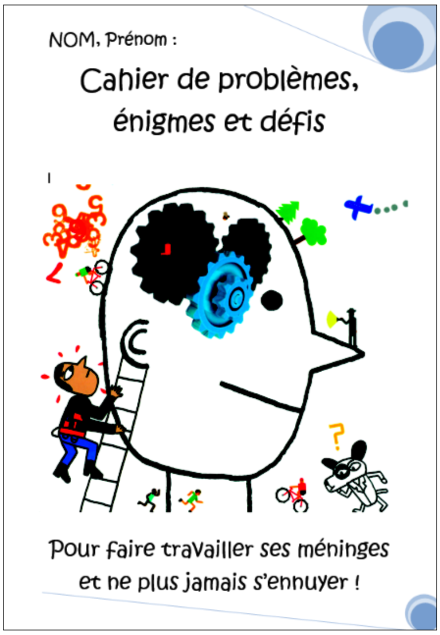
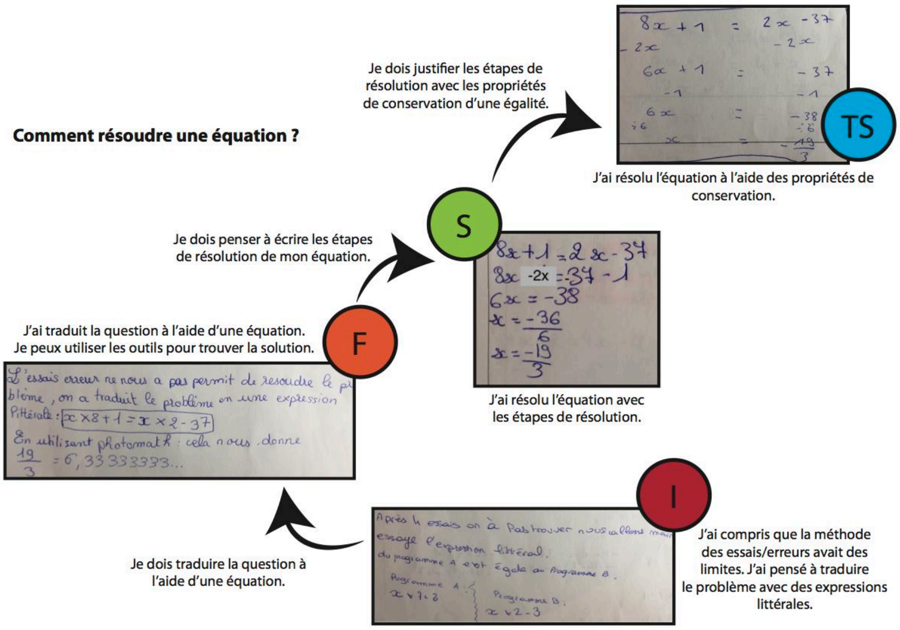
II – CALCUL LITTÉRAL





DÉMONTRER À L'AIDE DU CALCUL LITTÉRAL, S'INITIER AU RAISONNEMENT

Héla BEN SALAH
Collège Erik Satie 77 Mitry-Mory

Karine HELIES
Collège Hutinel 77 Gretz-Armainvilliers

Geoffroy LABOUDIGUE
Collège Roger Martin du Gard 93 Epinay-Sur-Seine

Les programmes

« La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. […]
En 3e, les élèves résolvent algébriquement équations et inéquations du 1er degré, et mobilisent le calcul littéral pour démontrer. »

Problématique

L'objectif du travail qui est mené en cycle 4, en calcul littéral, est de familiariser au maximum les élèves avec l'utilisation de la lettre en mathématiques. Le recours au calcul littéral doit prendre du sens pour les élèves et devenir un réflexe.
L'apprentissage de l'utilisation de la lettre en mathématiques est complexe car l'élève doit prendre conscience de ses différents statuts.

Analyse a priori

Nous avons fait le choix d'activités permettant une imprégnation régulière et progressive du calcul littéral (questions flash).
Pour donner du sens à la lettre, et pour rendre la notion plus concrète, nous avons privilégié des activités issues de domaines variés et à supports variés (questions flash, exercices, activités de groupes, problèmes, jeux).
L'emploi de solveurs d'équations doit aider les élèves à s'engager plus facilement dans une démarche utilisant le calcul littéral.

Des questions flash quotidiennes

L'objectif de ces séances est d'automatiser l'utilisation du calcul littéral et de ses règles.
Plutôt que de construire des séries de questions flash composées uniquement de calcul littéral, nous avons opté pour une question de calcul littéral par série (et donc une par jour !).

Nous donnons ici des exemples de questions flash données tout au long de l'année.

En arithmétique

1	Exprimer en fonction de x, le double de x *(ou un multiple de 2)*
2	Exprimer en fonction de x, le double de x augmenté de 1.
3	Exprimer en fonction de x, le triple de x. *(ou un multiple de 3)*
4	Exprimer en fonction de x, le triple de x diminué de 2.
5	Exprimer en fonction de n, le nombre entier suivant n.
6	Exprimer en fonction de n, le nombre entier précédent n.
7	Exprimer en fonction de n, les deux nombres entiers suivants n.
8	Exprimer en fonction de n, les deux nombres entiers précédents n.
9	Exprimer en fonction de n, le tiers de n.
10	Exprimer en fonction de n, le cube de n.
11	Exprimer en fonction de n, le carré de n.
12	Exprimer en fonction de n, la somme du double de n et de 9.
13	Exprimer en fonction de n, le produit de 6 par le triple de n.
14	Exprimer en fonction de n, la différence de n et de 7.
15	Exprimer en fonction de n, le produit de la différence de n et de 5 par la somme de n et de 4.

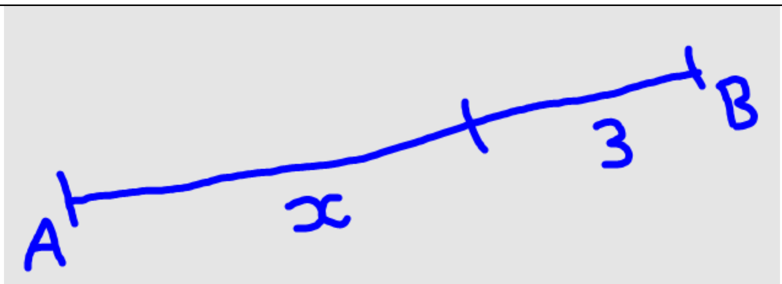
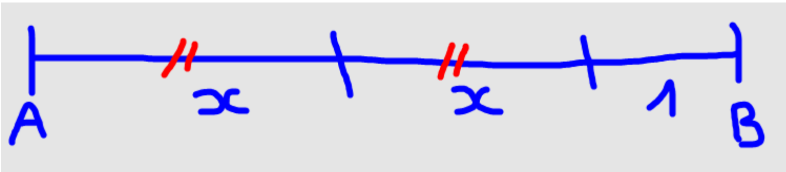
Avec des programmes de calculs et des fonctions

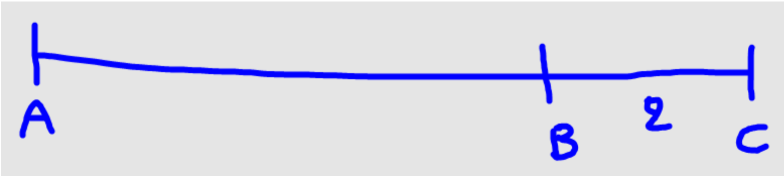
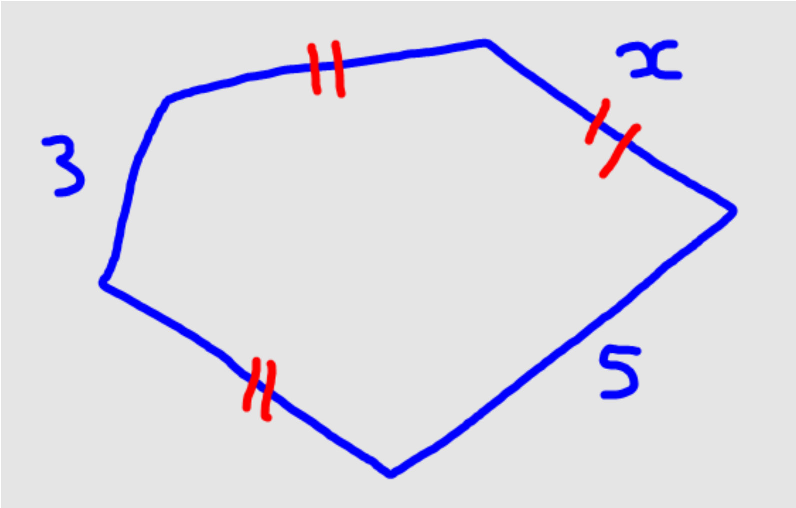
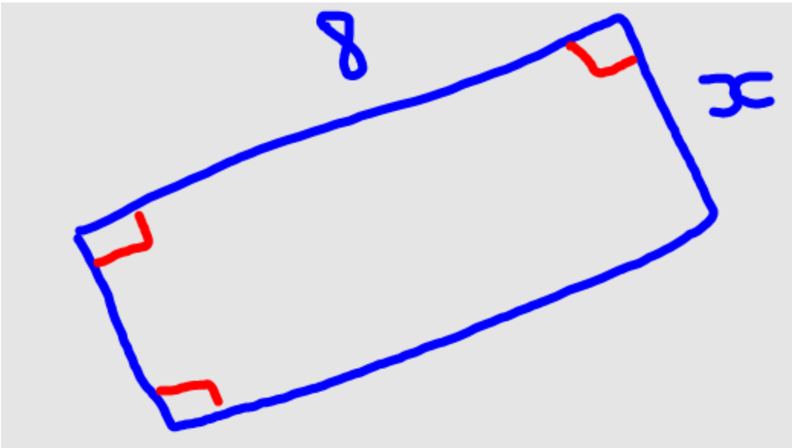
1	Choisir un nombre. Le multiplier par 3. Ajouter 2. Que donne le programme si on choisit 4 au départ ?
2	Choisir un nombre. Le multiplier par 3. Ajouter 2. Quel nombre a-t-on choisi sachant qu'on a obtenu 32 à la fin ?
3	Choisir un nombre. Le multiplier par 3. Ajouter 2. Que donne le programme si on choisit x au départ ?
4	Choisir un nombre. Ajouter 2. Multiplier le résultat par 3. Que donne le programme si on choisit 4 au départ ?
5	Choisir un nombre. Ajouter 2. Multiplier le résultat par 3. Que donne le programme si on choisit x au départ ?
6	Choisir un nombre. Ajouter 1. Elever au carré le résultat. Que donne le programme si on choisit 3 et – 3 au départ ?

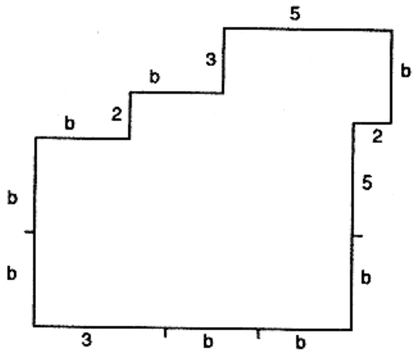
7	Choisir un nombre. Ajouter 1. Elever au carré le résultat. Que donne le programme si on choisit *x* au départ ?
8	 Que fait ce programme ?
9	 Que fait ce programme ?
10	 Le nombre obtenu par ce programme est 12. Quel est le nombre de départ qui a été caché ?

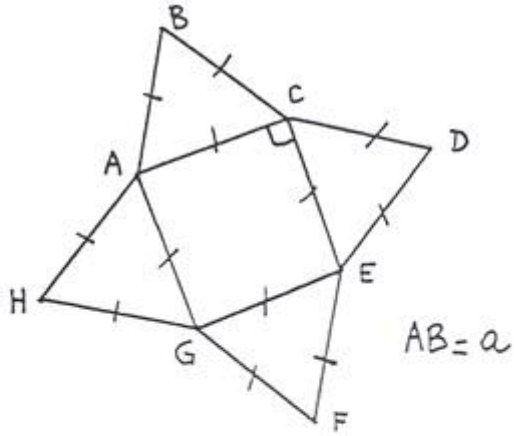
11	On considère la fonction qui, à un nombre x, associe son carré augmenté de 3. Donner une expression algébrique de la fonction.
12	On considère la fonction qui, à un nombre x, associe son carré augmenté de 3. Donner une expression algébrique de la fonction.
13	Voici un programme de calculs : Choisir un nombre. Calculer son carré. Multiplier par 5. Ajouter 10. Marc choisit 2 comme nombre de départ et obtient 30. Est-ce exact ?
14	Voici un programme de calculs : Choisir un nombre. Calculer son carré. Multiplier par 5. Ajouter 10. On note p la fonction qui, au nombre x choisi, associe le résultat obtenu. Déterminer une expression algébrique de $p(x)$.
15	Trouver un antécédent de 10,2 par la fonction p.

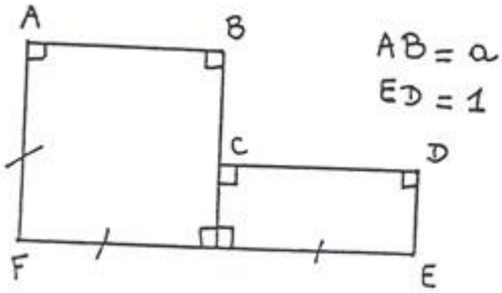
En géométrie

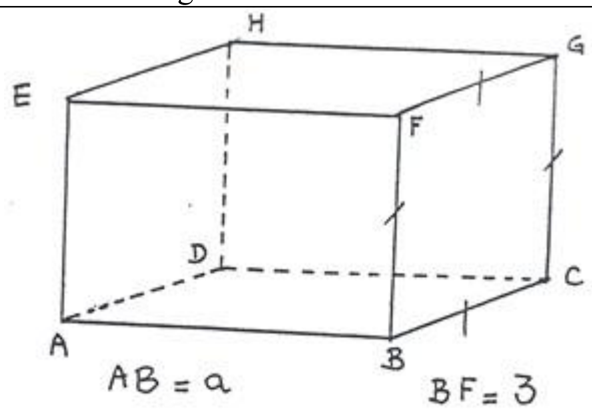
1	 Exprimer la longueur AB en fonction de x.
2	 Exprimer la longueur AB en fonction de x.

3	 Sachant que AC = x, exprimer la longueur AB en fonction de x.
4	 Exprimer le périmètre du polygone en fonction de x.
5	 Exprimer le périmètre du polygone en fonction de x.

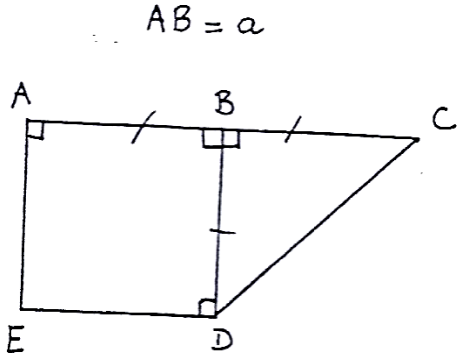
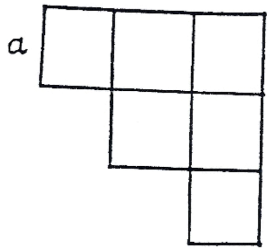
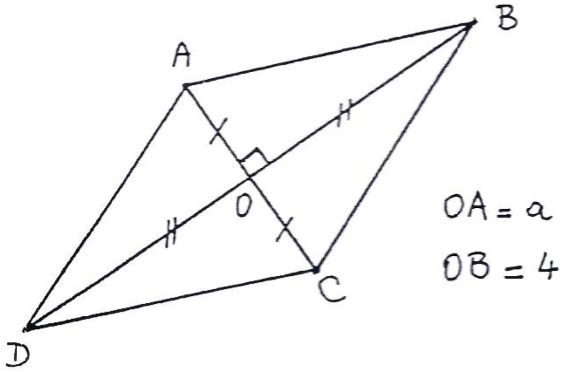
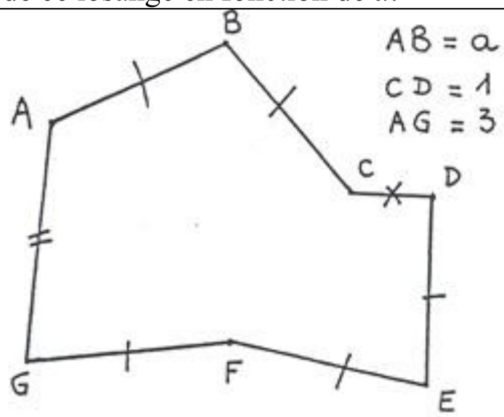
<table>
<tr>
<td>6</td>
<td>


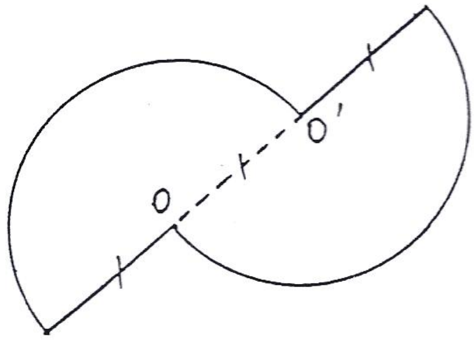
Exprimer le périmètre du polygone en fonction de b.
</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>


Exprimer le périmètre du polygone ABCDEFGH en fonction de a.
</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>


Exprimer le périmètre de cette figure en fonction de a.
Exprimer l’aire de cette figure en fonction de a.
</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>


Exprimer la longueur totale des arêtes du pavé en fonction de a.
Exprimer le volume du pavé en fonction de a.
</td>
</tr>
</table>

10	 Exprimer l’aire de cette figure en fonction de *a*.
11	 Exprimer le périmètre de cette figure constituée de carrés de côté *a*. Exprimer l’aire de cette figure en fonction de *a*.
12	 Exprimer l’aire de ce losange en fonction de *a*.
13	 Exprimer le périmètre de ce polygone en fonction de *a*.

14	 Sachant que le rayon des demi-cercles est a, exprimer le périmètre de cette figure en fonction de a et de π.

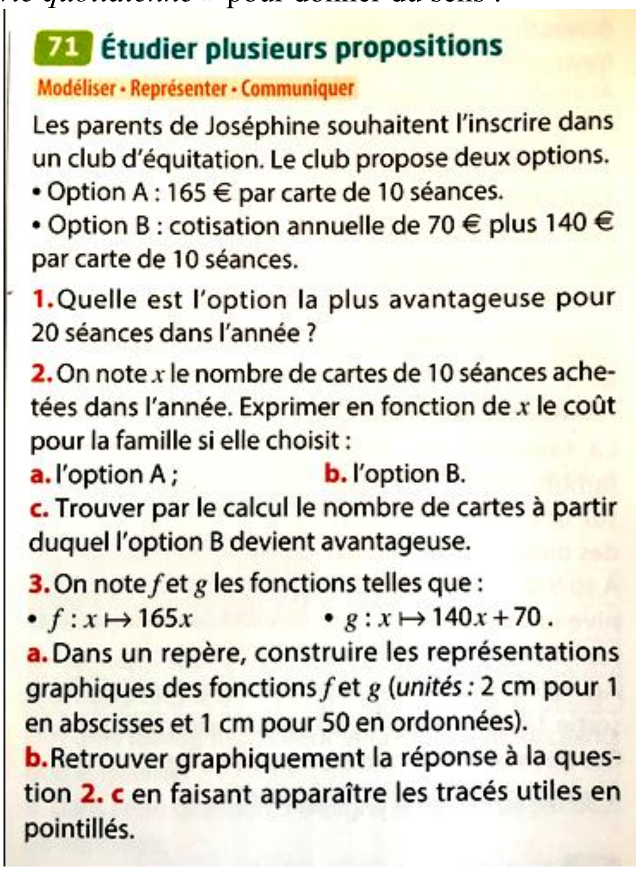
Plusieurs de ces questions sont tirées de brochures de l'APMEP.

Exercices types sur le calcul littéral

Exercices extraits du livre Transmath 3$^{\text{ème}}$ NATHAN 2016.

Le calcul littéral pour modéliser :

« *Modéliser dans la vie quotidienne* » pour donner du sens :



71 Étudier plusieurs propositions

Modéliser • Représenter • Communiquer

Les parents de Joséphine souhaitent l'inscrire dans un club d'équitation. Le club propose deux options.

• Option A : 165 € par carte de 10 séances.

• Option B : cotisation annuelle de 70 € plus 140 € par carte de 10 séances.

1. Quelle est l'option la plus avantageuse pour 20 séances dans l'année ?

2. On note x le nombre de cartes de 10 séances achetées dans l'année. Exprimer en fonction de x le coût pour la famille si elle choisit :

a. l'option A ; **b.** l'option B.

c. Trouver par le calcul le nombre de cartes à partir duquel l'option B devient avantageuse.

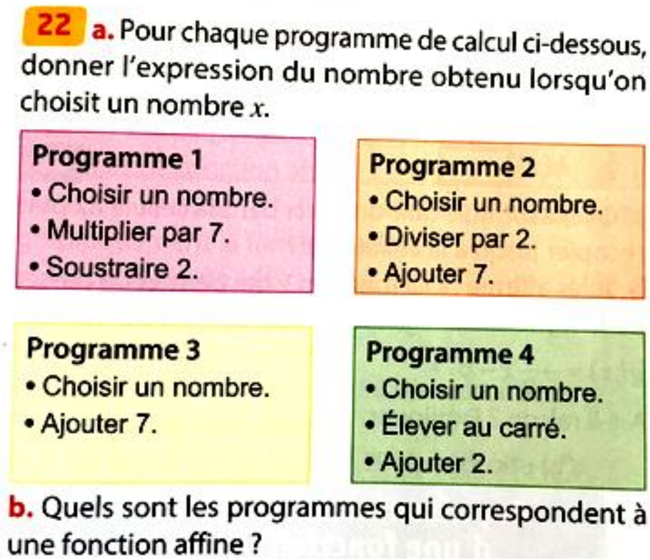
3. On note f et g les fonctions telles que :

• $f : x \mapsto 165x$ • $g : x \mapsto 140x + 70$.

a. Dans un repère, construire les représentations graphiques des fonctions f et g (*unités :* 2 cm pour 1 en abscisses et 1 cm pour 50 en ordonnées).

b. Retrouver graphiquement la réponse à la question **2. c** en faisant apparaître les tracés utiles en pointillés.

«Changer de cadre en mathématiques » :



22 **a.** Pour chaque programme de calcul ci-dessous, donner l'expression du nombre obtenu lorsqu'on choisit un nombre x.

Programme 1
- Choisir un nombre.
- Multiplier par 7.
- Soustraire 2.

Programme 2
- Choisir un nombre.
- Diviser par 2.
- Ajouter 7.

Programme 3
- Choisir un nombre.
- Ajouter 7.

Programme 4
- Choisir un nombre.
- Élever au carré.
- Ajouter 2.

b. Quels sont les programmes qui correspondent à une fonction affine ?

Le calcul littéral pour trouver une inconnue

« Trouver une inconnue dans la vie quotidienne » :

Un site de stockage de données en ligne propose l'offre suivante :

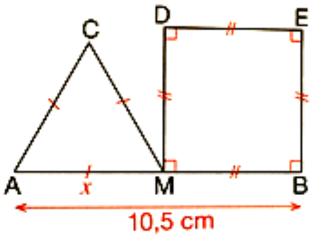
Si on décide d'acheter 400 Go, combien va-t-on payer ?
Avec 15 euros combien de gigaoctets peut-on acheter ?
On note f la fonction qui modélise le montant, en euros, d'une commande de x gigaoctets.
Donne l'expression de $f(x)$ et donne la nature de la fonction.
Calcule l'image de 400. **Interprète ton résultat pour la situation.**
Calcule l'antécédent de 15 par la fonction f. **Interprète ton résultat pour la situation.**
Calcule l'antécédent de 30 par f.

« Trouver une inconnue en mathématiques »

69 Résoudre un problème

Chercher • Modéliser • Communiquer

[AB] est un segment de longueur 10,5 cm.
M est un point du segment [AB].
On note x la longueur AM en cm ($0 \leqslant x \leqslant 10$).
ACM est un triangle équilatéral et MDEB est un carré.



On cherche la position du point M pour que le triangle et le carré aient le même périmètre.
On note f et g les fonctions qui, à x, associent respectivement le périmètre, en cm, du triangle ACM et le périmètre, en cm, du carré MDEB.

a. Donner les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.
b. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
c. Répondre au problème posé.

Le calcul littéral pour démontrer une conjecture

Voici un algorithme :

Choisir un nombre Ajouter 3 à ce nombre Multiplier le résultat précédent par 2 Soustraire au résultat précédent le double du nombre de départ

Teste cet algorithme avec les nombres 1 ; 15 ; (– 5).
Que constates-tu ?
Démontre la conjecture de la question b).
Ce type d'exercice peut être complexifié et complété par une question qui nécessitera une équation pour trouver le nombre de départ.

Le calcul littéral pour démontrer une propriété mathématique

On peut montrer aux élèves l'utilité du calcul littéral pour démontrer une propriété mathématique ; on n'attend pas d'eux qu'ils sachent faire seuls la démonstration, l'objectif étant de les sensibiliser à la démonstration, chose qu'ils feront souvent en classe de seconde. On peut privilégier les démonstrations courtes.

Exemple de propriété **: « si $a = b$ alors $a - c = b - c$ »**
Ici a, b, c désignent des nombres quelconques.
On sait que : (*) **« $A = B$ équivaut à $A - B = 0$ »**

<u>Démonstration</u> :
On a $(a - c) - (b - c) = a - c - b + c = a - b$
Or $a = b$ donc $a - b = 0$
Donc $(a - c) - (b - c) = 0$ et, d'après la propriété (*), $a - c = b - c$.

Sur ce type de démonstration courte, il est facile pour nous professeur de rebondir sur des exemples pour donner du sens à la lettre, d'expliquer pour quelle raison on a recours à la lettre, et ce qu'est une démonstration mathématique.

Quelques pistes pour aider nos élèves à comprendre le calcul littéral

Il est important de reformuler les questions et les notions faisant apparaître des expressions littérales, afin de les rendre le plus accessible possible à l'élève. Cela permettra de donner du sens à la lettre, et de rendre concrète la notion abordée.
La plupart du temps, la notion de fonction est introduite comme étant une « machine mathématique » qui transforme un nombre en un autre nombre.
Il est utile de revenir à cette « machine » dans les différents chapitres qui abordent la notion de fonction pour donner du sens à la fonction et à x qui désigne le nombre qui va être transformé par la machine.

Il est alors important de **verbaliser** cette transformation, c'est à dire d'expliquer **ce que fait la fonction.**
Voici un type d'exercice qu'on donne souvent à nos élèves, qui est important pour la classe de seconde mais qui peut être très complexe pour certains élèves car ils ne comprennent pas ce qu'on leur demande de faire, d'où l'importance de la reformulation des notions.

On considère la fonction f définie pour tout nombre x par $f(x) = 3x + 2$.
1) Calculer l'image de 10.
2) Calculer $f(-3)$.
3) Quelle est l'antécédent du nombre 2 ?
4) Quelle est la valeur de x telle que $f(x) = 0$?

On commence tout d'abord par expliquer la première phrase.
On revient alors à la « machine mathématique » qui transforme le nombre x.

Consignes, informations données aux élèves	Verbalisation possible
On considère la fonction f définie pour tout nombre x par $f(x) = 3x + 2$.	f désigne une machine mathématique qui prend un nombre qu'on nommera x et qui le transforme en $3x + 2$. Le processus est : « je multiplie par 3 puis j'ajoute 2 ».

$3x + 2$	Trois fois le nombre de départ auquel on ajoute deux.
L'image de 10	Le résultat de la transformation du nombre 10 par la machine mathématique f. Si on veut détailler davantage pour les élèves… La machine f prend le nombre 10 puis elle le transforme en 3 fois lui-même augmenté de 2 qu'obtient-on ? …
$f(x)$	Le résultat de la transformation du nombre x.
L'antécédent d'un nombre	Le nombre de départ avant la transformation
Quel est l'antécédent du nombre 2 ?	Quel nombre a été transformé en 2 par la machine (par la fonction) ? Quel est le nombre qui lorsqu'on le multiplie par 3 puis on augmente de 2 donne 2 ? ….

Il est nécessaire de reformuler constamment avec les élèves, pour rendre l'utilisation de la lettre la plus naturelle possible et donner du sens au calcul littéral. La reformulation est au début faite et guidée par le professeur mais au fur et à mesure ces reformulations doivent être faites par les élèves eux-mêmes. La verbalisation du concept mathématique est importante dans l'apprentissage, principalement dans le calcul littéral.

Le festival des programmes de calculs en 3eme

L'objectif général de cette mini-séquence (deux temps de travail de deux heures) est de mobiliser les connaissances sur les programmes de calculs pour réactiver les connaissances sur les notions d'équations.

Les pré-requis pour cette séquence sont une bonne maîtrise du programme de calcul :
- calcul d'image ;
- calcul d'antécédent en « remontant le programme de calcul » et par essais-erreurs ;
- traduction d'un programme de calculs avec une expression littérale.

Les objectifs de cette séquence sont multiples :
- dans un premier temps, réinvestir les techniques de remontée et d'essais-erreurs pour déterminer un antécédent ;
- montrer la limite de ces techniques calculatoires lors de recherche de solutions non entières et ainsi justifier l'utilisation du calcul littéral comme méthode experte ;
- travailler la compétence représenter pour traduire une recherche d'antécédent par une équation ;

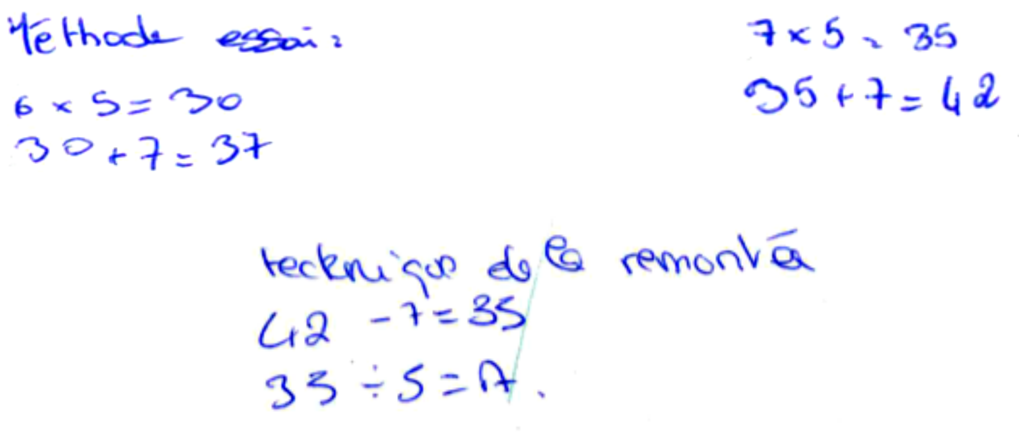
- résoudre algébriquement les équations et/ou utiliser les outils numériques de type solveurs d'équations (Photomath et THOT) pour déterminer les solutions des équations.

Le festival des programmes de calcul partie 1

Dans ce premier temps de travail, les élèves étaient en groupes de 4 et ont eu à leur disposition trois programmes de calculs et une consigne identique pour chacun des programmes : identifier le nombre de départ qui permet d'obtenir le nombre donné. La difficulté était croissante et l'objectif était de mobiliser des techniques de plus en plus avancées pour résoudre le problème.

1er programme :	- Choisir un nombre - Multiplier le résultat par 5 - Ajouter 7
Quel nombre faut-il prendre au départ pour obtenir 42 à l'arrivée ?	

→ La solution est entière et peut se trouver avec les méthodes habituelles : « remontée » ou essais-erreurs.



2eme programme :	- Choisir un nombre - Multiplier le résultat par 7 - Enlever 5
Quel nombre faut-il prendre au départ pour obtenir 1 à l'arrivée ?	

→ La solution n'est pas entière et la méthode des essais-erreurs va demander plus de temps avec l'incertitude de trouver la réponse. La technique de la remontée est alors la solution la plus efficace pour répondre à cette question.

La majorité des élèves n'a eu aucune difficulté à mobiliser la technique de la remontée pour trouver la solution. Néanmoins une première difficulté s'est présentée, lorsque les élèves se sont lancés dans une vérification avec un arrondi de la valeur $\frac{5}{7}$. Des débats ont eu lieu au sein des groupes et les élèves ont été sensibilisés au fait de considérer la fraction, valeur exacte, comme solution du problème.

$1 + 5 = 6$
$6 \div 7 = 0,857$

$0,857 \times 7 = 5,999$
$5,999 - 5 = 0,999 \simeq 1$
$\frac{6}{7}$ = valeur exate

3eme programme :	- Choisir un nombre - Ajouter 4 - Multiplier le résultat par 4 - Enlever le nombre de départ

Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 21 à l'arrivée ?

→ La technique de la remontée était impossible dans ce dernier programme, car la dernière étape fait appel au nombre de départ, qui est inconnu à ce moment-là. Le recours à l'expression littérale, la mise en équation de la question et l'utilisation de la propriété de distributivité sont alors nécessaires pour se ramener à une équation du type $ax + b = c$. Les deux premiers points étant les principaux enjeux de l'activité, la transformation de l'expression et la résolution pouvaient être laissées aux outils numériques Photomath et THOT.

x . C'est le nombre de départ
$x+4$
$\cancel{(4+x)} \times 4$
$(x+4) \times 4 - x$
$3x + 16$
avec photomath on a vue que le programme de Calcul pouvaient se traduis par $3x+16$

$-\frac{5}{3}$

$-\frac{5}{3}$ on l'a mis sous forme d'expression littérale

On ne peut pas faire la technique de la remontée parce qu'on a pas le nb de départ. On pense qu'il faut faire une équation. D'abord on a distribué et ensuite réduit grâce à photomath :

$(x+4)\times 4 - x$
$= 4x + 16 - x$
$= 3x + 16$

Donc $3x+16 = 21$
On fait l'équation :

$3x + 16 = 21$
$-16 \quad -16$
$3x = 5$
$\div 3 \quad \div 3$
$x = \frac{5}{3}$

Cela nous donne $\frac{5}{3}$ on à vérifié grâce à l'application Tot sur l'ordi et cela nous as donné 21

Lors de la synthèse collective, il a été discuté de l'intérêt d'avoir recours à l'expression littérale et à la mise en équation du problème. Ainsi les arguments qui faisaient consensus étaient :

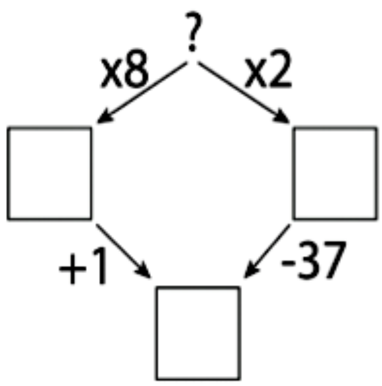
- le gain de temps ;
- la fiabilité de la technique, l'assurance de trouver la solution.

La technique de résolution des équations de type $ax + b = c$ a pu être montrée au tableau par les élèves (8 sur 23) qui étaient allés au bout de la résolution.
Les méthodes de résolution ont été retravaillées en questions flash de manière régulière à l'issue de ce premier temps.

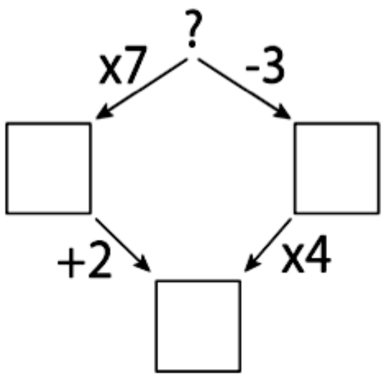
Le festival des programmes de calcul partie 2

Quelques semaines après, j'ai proposé un deuxième travail de groupes sur les programmes de calcul. La consigne de cette nouvelle activité demeurait très proche de la première activité : il fallait trouver un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnaient le même nombre.

Arbre 1 :



Arbre 2 :



Quel nombre faut-il prendre au départ pour obtenir le même nombre à l'arrivée ?

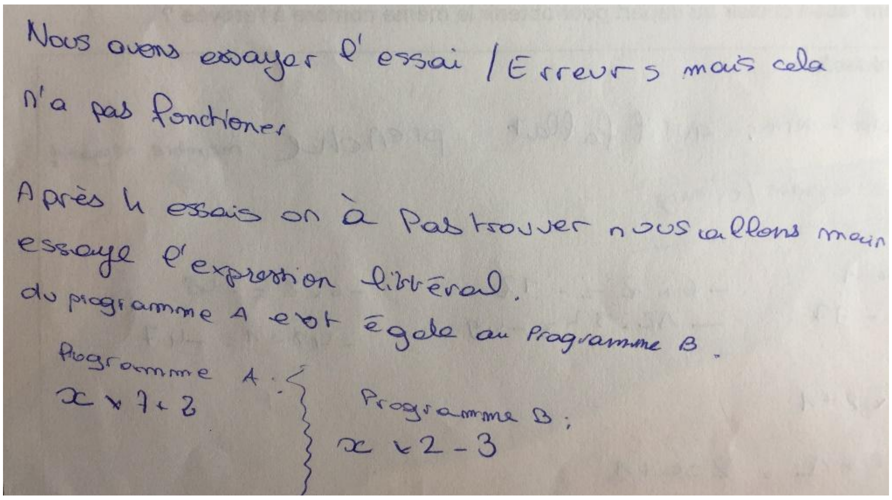
→ Les solutions aux deux arbres de calcul sont non entières ainsi l'essais-erreurs a peu de chances d'aboutir.

Mon attente minimum se situait donc sur la capacité à recourir au calcul littéral sans aides extérieures et à traduire l'énoncé à l'aide d'une équation de type $ax + b = cx + d$. Sur ce point, la séance menée montre plutôt de bons résultats, les élèves ont traduit rapidement l'énoncé sous forme d'une équation.

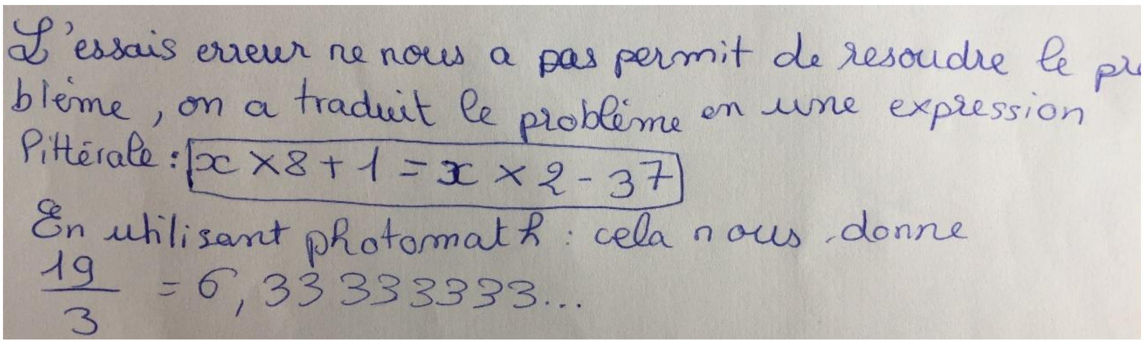
Ont eut recours aux expressions littérales des programmes de calcul	Ont traduit l'énoncé avec une équation
87,5 %	70,8 %

La majorité du temps de travail a donc été utilisée pour la résolution des équations et la différenciation sur les outils à utiliser. Les élèves disposaient à nouveau des solveurs d'équation Photomath (sur leur téléphone) et THOT (sur trois postes au fond de la classe). Des vidéos d'aide à la résolution d'équation étaient disponibles via le blog de la classe : mathlaboudigue.blogspot.com.

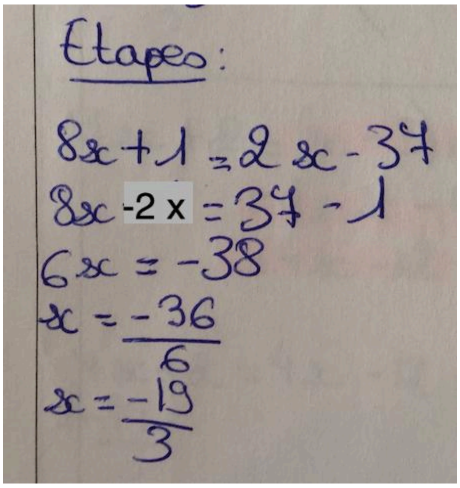
Pour la synthèse collective j'ai décidé de me focaliser sur la correction de l'arbre 1 et de projeter 4 copies d'élèves qui attestaient de 4 niveaux de maîtrise différents sur l'utilisation du calcul littéral pour résoudre une équation.



Résolution d'un niveau insuffisant



Résolution d'un niveau fragile

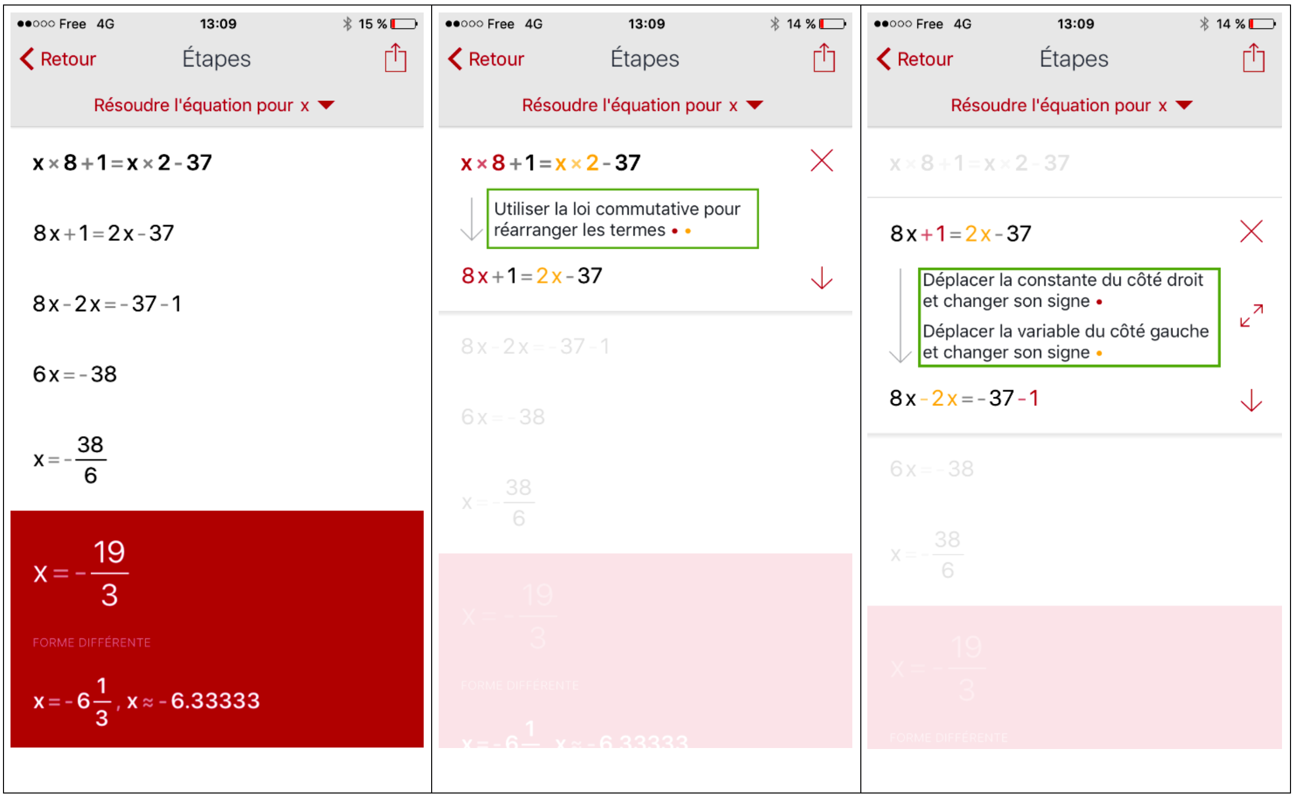


Résolution d'un niveau satisfaisant

Je leur ai donc demandé de décrire ce qu'avait fait l'élève pour chaque niveau et ce qu'il lui manquait pour arriver au niveau suivant. Il en est ressorti, en concertation avec les élèves, les critères d'évaluation suivants :

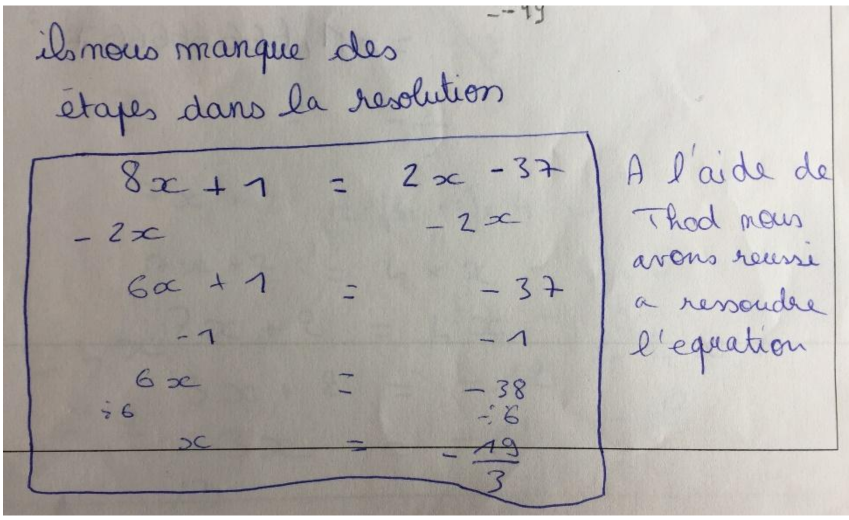
Insuffisant	Fragile	Satisfaisant
L'élève n'a été qu'à la moitié de la modélisation : il a traduit les programmes de calculs à l'aide d'expressions littérales mais n'a pas réussi à traduire l'énoncé à l'aide d'une équation.	L'élève a été au bout de la modélisation. Les deux programmes de calculs ont été traduits correctement et l'équation a été résolue grâce à l'outil Photomath. Le raisonnement sous-jacent à la résolution n'apparaît pas.	L'élève a été au bout de la modélisation et son raisonnement est précisé.

À cette étape-là de la synthèse collective, les élèves ne comprenaient pas pourquoi les critères du niveau satisfaisant n'étaient pas ceux d'un niveau très satisfaisant.
Comme les productions qui étaient d'un niveau satisfaisant étaient des productions réalisées à l'aide de l'application Photomath nous avons regardé en détail la résolution proposée par l'application.



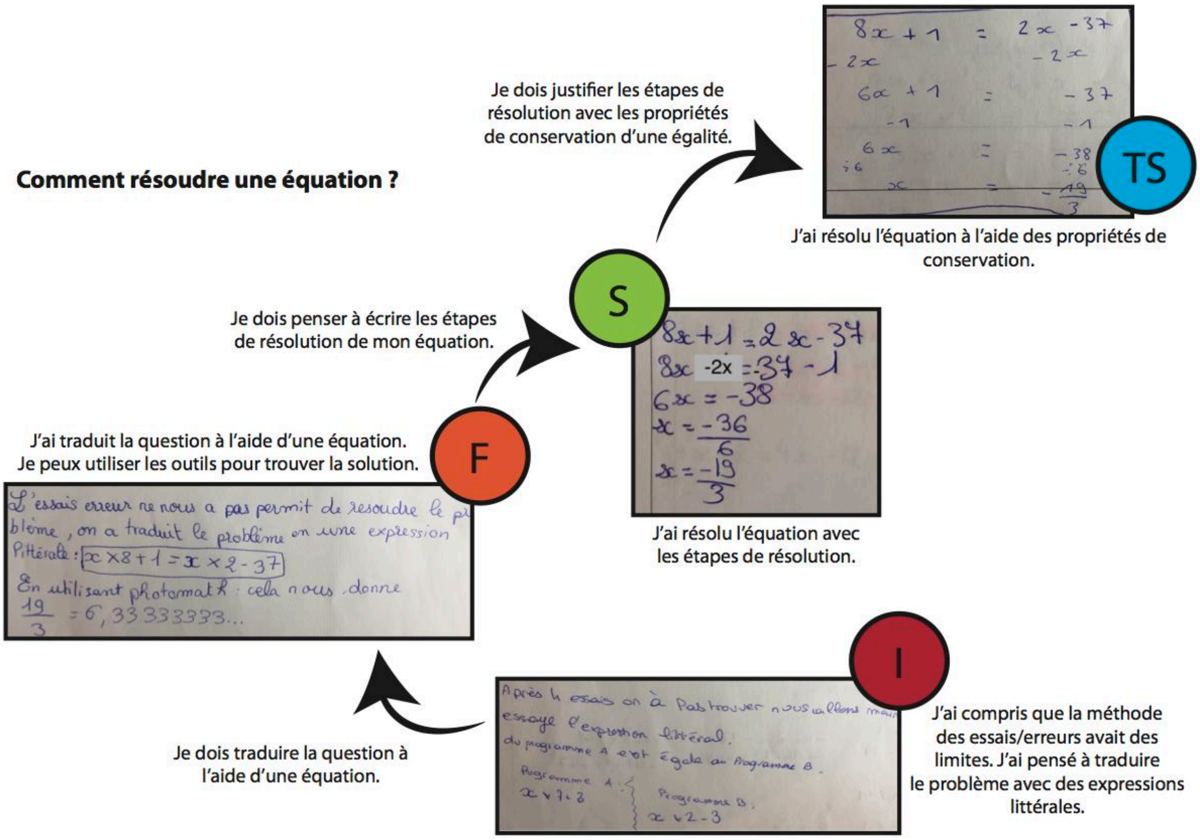
- La première étape de la résolution proposée par Photomath nous a permis de préciser ce qu'était la loi de commutativité de la multiplication.
- La seconde étape de résolution nous a interpellés. La question « Pourquoi on déplace du côté droit et pourquoi on change le signe ?» est rapidement arrivée. Cela a permis de rappeler les propriétés de conservation d'une égalité vues en 4[e] et de justifier l'existence du quatrième niveau de maîtrise, le niveau très satisfaisant dont les critères sont les suivants : la modélisation est réussie et le raisonnement est clairement précisé. Les propriétés de conservation sont écrites pour justifier le passage d'une ligne à l'autre.

Les propriétés de conservation de l'égalité sont clairement mises en avant dans le logiciel THOT. Ainsi nous avons conclu avec la production d'un niveau très satisfaisant dont la résolution reprend la même méthode que décrite dans le logiciel THOT.



Résolution d'un niveau très satisfaisant

À l'issue de la séance, une « fiche progrès » indiquant les critères de la future évaluation a été mise à disposition. Lors de l'évaluation qui a suivi la semaine d'après, 80 % des élèves ont obtenu un très satisfaisant sur la résolution d'une équation de type $ax + b = cx + d$.



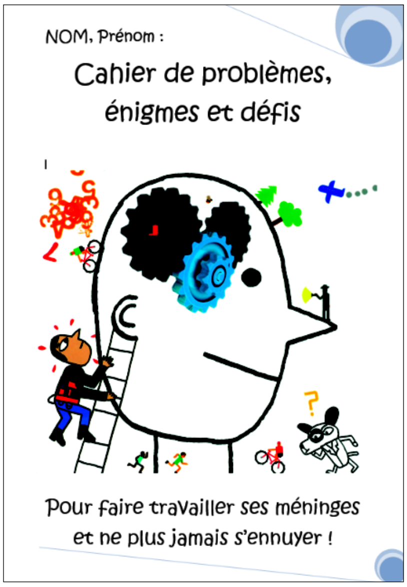
« Fiche progrès » explicitant les critères d'évaluation et les conseils explicites pour franchir les niveaux

Cahier de problèmes : travail différencié en rituel

J'ai eu l'envie d'introduire un « cahier de problèmes » l'an passé, comme certains collègues de primaire font déjà dans leurs classes.
Cette idée m'avait été soufflée par les très intéressantes vidéos de Stella Baruck :
https://www.reseau-canope.fr/mathematiques-stella-baruk/ .
Aussi, dès la rentrée 2015, j'utilisais un cahier par élève (type cahier de brouillon) avec mes classes de 6ème, chaque lundi, et je leur proposais un problème à résoudre comme un rituel de début de semaine. Je stockais ces cahiers au fond de ma salle.
Face à l'enthousiasme de mes jeunes élèves, l'idée est venue quelques semaines plus tard, d'étendre cet outil à mes autres classes, des 3èmes.

L'objectif de ce cahier est de replacer la résolution de problèmes au cœur des activités mathématiques tout en proposant, par moments, des activités différenciées.

Page de garde collée sur la 1ère de couverture d'un petit cahier de brouillon :



Pour plus de facilité (éviter un diagnostic trop lourd, avoir une gestion plus souple), j'ai décidé, non pas de proposer des problèmes différents à chaque élève mais de proposer plusieurs problèmes de niveau de difficulté croissant.

Un premier exemple en 3ème : résolution d'équations (tirés de l'ouvrage « Maths ensemble et pour chacun 4ème »), après avoir traité le chapitre sur les équations.

<u>Exercice du nombre mystère (1)</u>

Emma et Zoé ont chacune une calculatrice. Elles ont "tapé" le même nombre.
Ensuite, Emma a appuyé sur les touches :

×	2	+	3	EXE

et Zoé a appuyé sur les touches :

–	2	EXE	×	4	+	8	EXE

Quelle coïncidence : elles obtiennent le même résultat ! Quel nombre ont-elles bien pu choisir ?

<u>Exercice du nombre mystère (2)</u>

Ahmed et Chloé ont chacun une calculatrice. Ils ont "tapé" le même nombre.
Ensuite, Ahmed a appuyé sur les touches :

×	3	+	5	EXE

et Chloé a appuyé sur les touches :

+	1	EXE	×	1	0	–	1	0	EXE

Quelle surprise : ils obtiennent aussi le même résultat ! Quels nombres ont-ils bien pu choisir ?

<u>Exercice du nombre mystère (3)</u>

Yuna et Pierre ont chacun une calculatrice. Ils ont "tapé" le même nombre.
Ensuite, Yuna a appuyé sur les touches :

×	2	+	3	EXE

et Pierre a appuyé sur les touches :

–	2	EXE	×	5	+	8	EXE

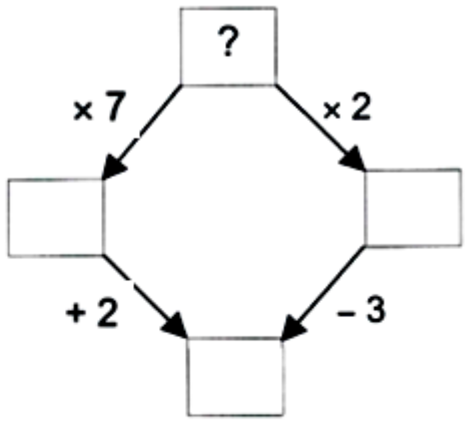
Incroyable mais vrai : ils obtiennent eux aussi le même résultat ! Quels nombres ont-ils bien pu choisir ?

Un deuxième exemple, au niveau 3ème, tiré des documents d'accompagnement, pour une séance d'une heure entière :

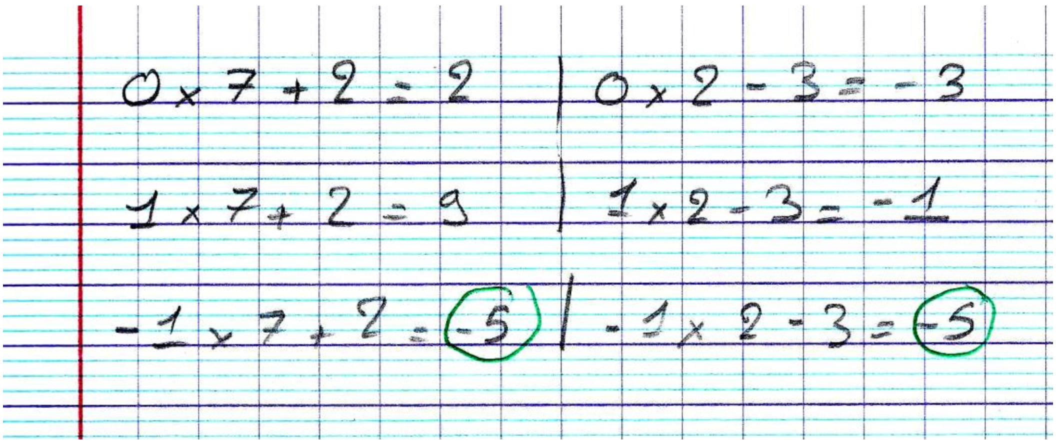
Niveau 1 :

Dans la situation qui suit, les deux chemins mènent au même résultat.

De quel nombre est-on parti ?



Rédaction d'une élève de 3ème par tâtonnements :



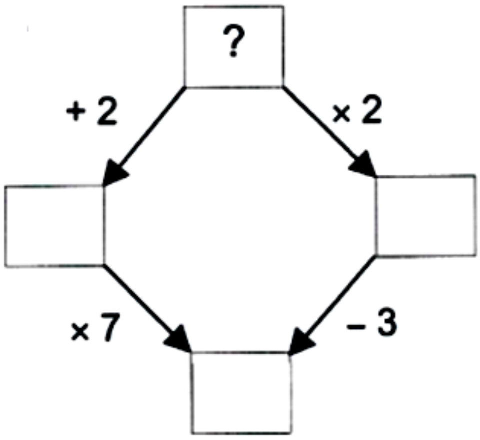
$0 \times 7 + 2 = 2$ | $0 \times 2 - 3 = -3$

$1 \times 7 + 2 = 9$ | $1 \times 2 - 3 = -1$

$-1 \times 7 + 2 = -5$ | $-1 \times 2 - 3 = -5$

De nombreux élèves ont procédé ainsi ce qui prouve une fois de plus leur attachement aux méthodes utilisant des expressions numériques ; la méthode experte de résolution à partir d'une équation n'est pas encore automatisée pour certains.
Cette méthode experte est explicitée en classe pendant un temps de correction, puis l'exercice niveau 2 est distribué aux élèves. Dans ce nouvel exercice, la solution est décimale et des parenthèses sont nécessaires dans la mise en équation ce qui complique la situation par rapport à l'exercice niveau 1. Le but étant que les élèves quittent leurs méthodes numériques.

Niveau 2 :
De quel nombre est-on parti ?



Rédaction d'une élève de 3ème à l'aide d'une mise en équation :

$(x+2)\times 7 = 2x-3$

$x\times 7 + 2\times 7 = 2x-3$

$7x+14 = 2x-3$

$7x+14-14 = 2x-3-14$

$7x = 2x-17$

$7x-2x = 2x-2x-17$

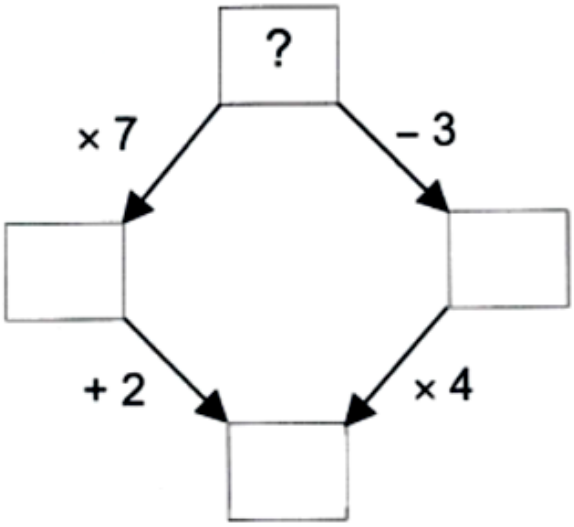
$\frac{5x}{5} = \frac{-17}{5}$

$x = -3{,}4$

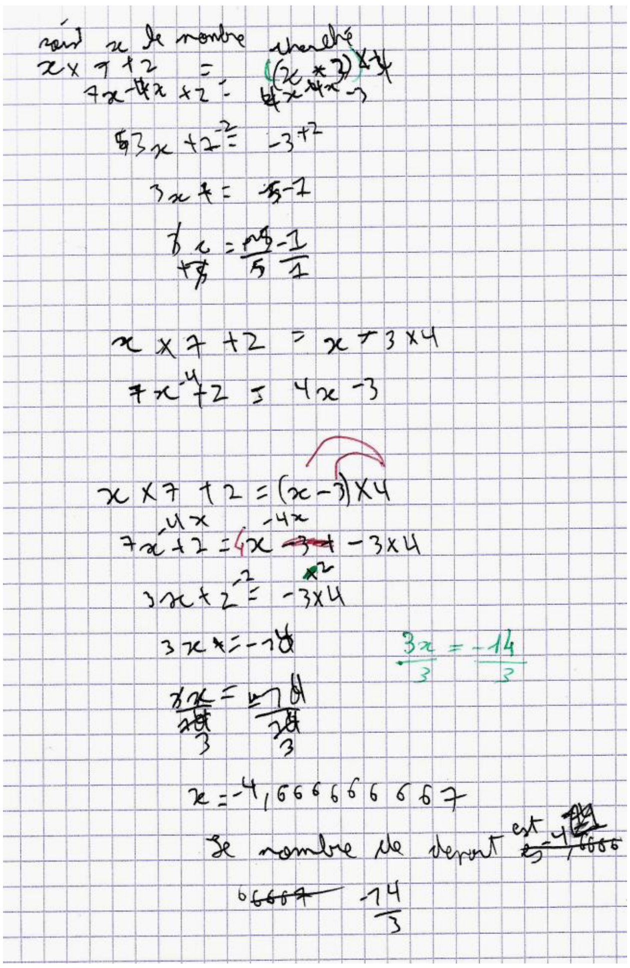
Le nombre recherché et $-3{,}4$.

Le niveau 3 est ensuite distribué aux élèves ayant réussi le niveau 2. Dans ce nouvel exercice, la solution n’est pas décimale et des parenthèses sont nécessaires dans la mise en équation.

Niveau 3 :
De quel nombre est-on parti ?



Rédaction d'un élève de 3ème à l'aide d'une mise en équation difficile pour plusieurs raisons.
L'élève oublie dans un premier temps les parenthèses, puis il n'utilise pas la distributivité simple enfin il confond valeur approchée et valeur exacte.
Ce qui est intéressant c'est que l'élève a souhaité contrôler son résultat à la calculatrice en utilisant la valeur approchée – 4,666666667. En n'obtenant pas le même résultat, il a pris conscience de la différence entre valeur exacte et valeur approchée.


soit x le nombre cherché
x × 7 + 2 = (x − 3) × 4
x × 7 + 2 = x − 3 × 4
7x −4 + 2 = 4x − 3
x × 7 + 2 = (x − 3) × 4
7x + 2 = 4x − 3 × 4
3x + 2 = −3 × 4
3x = −14
3x/3 = −14/3
x = −4,6666666667
le nombre de départ est −14/3

Ce cahier de problèmes, qui n'est pas exclusivement réservé au calcul littéral, me permet de mettre rapidement les élèves au travail car la démarche est ritualisée (je me fais même reprendre par mes élèves lorsque le lundi, je ne leur propose pas de problème !). Chaque élève avance à son rythme. Je l'utilise aussi en dehors du lundi lorsque des élèves ont terminé en avance leur travail.

Les élèves cherchent 5 minutes de façon individuelle (comme en évaluation) ; suite à quoi nous faisons une lecture collective. Puis viennent les éventuelles explications et débuts de démarches possibles. Je laisse ensuite 10 minutes de recherche en groupe. Les 5 ou 10 dernières minutes du rituel sont accordées à la rédaction du niveau 1. Pour les élèves qui sont passés aux autres niveaux, j'ai parfois le temps de corriger sur le cahier pendant le temps de recherche.
Je n'indique pas le niveau sur le sujet distribué aux élèves car je ne veux pas créer de compétition souvent mal vécue par les élèves les plus en difficulté.
Au niveau de l'organisation du cahier, les élèves collent le sujet du problème en haut et à gauche d'une double page (un problème par double page). Ensuite, ils écrivent « partie recherche », puis « partie rédaction ».

Pendant le temps de recherche, rédigent ceux qui veulent ! En effet, j'ai constaté qu'un grand nombre des élèves ne s'autorisent pas à écrire tant que le chemin vers la solution ne leur est pas clair. Là encore, un cadre bienveillant, valorisant et un travail sur l'erreur peuvent être menés (avec appui d'un visualiseur par exemple ; JEP : Journal d'Erreurs et de Progrès).
J'essaie de créer 3 niveaux par thème (cela permet d'approfondir un sujet) mais ce n'est pas toujours facile à trouver. C'est pourquoi, j'utilise aussi 3 niveaux sur des thèmes différents (à partir de rallyes par exemple). Je vois aussi un intérêt à proposer des thèmes différents : générer de la flexibilité chez les élèves.
Les deux organisations me semblent intéressantes et complémentaires.

Il serait possible de définir plus précisément les niveaux, en dégageant des critères. Exemple : niveau 1 : application ; niveau 2 : tâche intermédiaire ; niveau 3 : tâche à prise d'initiative.

Au niveau de l'organisation de la classe, je distribue le problème niveau 1 à tout le monde et ensuite je distribue les suivants à la demande et en fonction de la réussite. En cas d'erreur je demande à l'élève de reprendre son raisonnement ; ils peuvent aussi s'aider entre eux car ils sont placés en îlots bonifiés. Certains élèves, sans doute, ne feront peut-être aucun problème de niveau 3 de l'année.

Parfois, seuls deux problèmes suffisent pour gérer l'hétérogénéité. Souvent aussi, la recherche et la mise en commun des idées débordent des 20 minutes ; dans ce cas, je ne formalise la correction que le lundi suivant. Quand les élèves sont lancés, on pourrait facilement y passer l'heure entière !
Des temps de retour sur les problèmes niveau 2 et 3 (que je ne corrige pas toujours en classe entière) sont nécessaires : l'AP me permet de faire cela en 6ème. En 3ème cela me manque.

Pour conclure sur cet outil, je pense que l'engouement de mes élèves le lundi matin face aux « problèmes du lundi » provient du fait que je les « libère » de la rédaction (ce qui se voit car ils ne pensent pas souvent à conclure dans leurs traces écrites).

Je pense aussi qu'un grand nombre d'entre eux a besoin :

- d'être confronté aux problèmes (être face au problème seul pendant 5 minutes) ;
- d'être guidé dans leurs recherches (prévoir un « guide » distribué aux élèves) ;
- d'être largement accompagné dans la rédaction du raisonnement ;
- d'être valorisé dans n'importe quelle démarche engagée.

CALCUL LITTÉRAL ET MAINS D'UN JEU DE CARTES

Mohammed MESMOUDI
Collège Jacques-Yves Cousteau, 77 Bussy-Saint-Georges

Objectifs

- Introduction d'une manière naturelle à l'utilisation d'une lettre dans un calcul, substitution par une valeur numérique.
- Expression littérale, simplification d'écriture, factorisation, règles de calcul, notations.

Questions flash (évaluation diagnostique)

Voici une main d'un jeu de carte
La valeur de cette main est :
$5 + 6 + 9 + K + K = 20 + 2K$.

1) De la même façon, calculer les valeurs des mains suivantes.

2) Peut-on connaître la (ou les) main(s) gagnante(s) ? (débat à entamer avec les élèves en testant plusieurs fois avec des valeurs différentes).

Connaissances et compétences travaillées

Domaines du socle et éléments signifiants		Principales compétences travaillées	Descripteur ou contextes
D1.1	S'exprimer à l'oral et à l'écrit	Communiquer	Décrire à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole.
D1.3	Comprendre, s'exprimer dans les langages mathématiques et scientifiques.	Calculer, Raisonner, Modéliser	- Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes. - Utiliser le calcul littéral
D 2	- Organiser son travail personnel -Coopération et réalisation de projets	Chercher, Raisonner	- Identifier et résoudre un problème. - Se constituer des outils personnels. - Travailler en équipe
D 3	– Réflexion et discernement	Raisonner, Communiquer	Fonder et défendre ses jugements
D 4	– Mener une démarche scientifique, résoudre un problème – Conception, création et réalisation	Chercher, raisonner, représenter, communiquer	- Manipuler, modéliser, analyser. - Communiquer un résultat. - Estimer et contrôler les résultats - Observation, imagination, créativité, mobilisation des connaissances

Retour d'expérience d'une séance

Après avoir fait avec les élèves de 4ème et de 5ème les questions de la première page, j'ai demandé aux élèves de se mettre en petits groupes de 3 ou 4 et d'inventer leur propre jeu et de réaffecter aux cartes R, D, V, H, B, J de nouvelles valeurs positives ou négatives. Je leur ai demandé de tester leurs nouveaux jeux pendant un quart d'heure et de noter sur un cahier ou une feuille les calculs des dernières mains pour établir un classement des joueurs.

A la fin des jeux, j'ai demandé à chaque groupe de rédiger sur une feuille les règles de leur jeu ainsi que quelques exemples de calcul avec des lettres. La feuille en question doit être photocopiée et collée sur leur cahier de cours.

Les élèves se sont bien prêtés au jeu. A noter qu'il fallait leur demander à plusieurs reprises de baisser le ton car, en jouant, ils oublient rapidement qu'ils étaient en cours. A la fin du temps fixé pour jouer, plusieurs élèves voulaient continuer les parties et avaient du mal à arrêter. Mais globalement cela s'est bien passé et ils ont tous rédigé leur propre jeu et exemples. Pendant le temps du jeu, je passais dans les rangs pour voir comment ils travaillaient en groupes et pour leur demander de m'expliquer leurs jeux et les règles adoptées. Les calculs des mains étaient bien faits, et c'était le but. Voici deux exemples de jeux.

Dans le premier exemple, les élèves ont proposé une règle de jeu et des valeurs positives ou négatives aux lettres et à chaque tour ils ont changé les valeurs.

Dans le deuxième exemple, les élèves ont proposé un autre jeu. Les valeurs des lettres sont prises au hasard dans une urne dans laquelle ils ont mis des bouts de papier contenant des nombres positifs et négatifs. Les joueurs ne pouvaient pas connaître les valeurs de leurs mains avant qu'ils aient fini de jouer.

Jeu1

Vendredi 31 mars

Notre jeu nécessite un jeu de 52 cartes et 4 joueurs au moins.
Chaque carte n'a une valeur que si elle est alliée à sa paire

- K + K ou Q + Q → -10 pts
- J + J → -5 pts
- A + A → 1 pt
- 2 + 2 → 2 pts
- 3 + 3 → 3 pts
- 4 + 4 → 4 pts

etc...

Quand les 52 cartes du jeu sont distribuées, le joueur peut alors prendre connaissance de ses cartes. Il devra déposer ses paires dans une pile respective à chaque joueur. Le but du jeu étant d'obtenir un maximum de points.

Exemple :

- main I : 3 ; 7 ; 5 ; A ; 2 ; 6 ; Q ; 5 ; 9 ; 4 ; 9 ; Q ; ...
- main II : 3 ; 2 ; 6 ; 7 ; 10 ; K ; A ; 8 ; 8 ; 6 ; 7 ; K ; 4.
- main III : 6 ; 7 ; 5 ; 2 ; J ; A ; 4 ; 4 ; J ; 9 ; K ; J ; 3
- main IV : J ; J ; A ; 8 ; J ; K ; 3 ; Q ; Q ; 10 ; 10 ; 3 ; ...

Avec les paires mises de côtés :

- main I : 3 ; 7 ; A ; 2 ; 6 ; - ; 10 | 5 ; 5 ; Q ; Q ; 9 ; 9
- main II : 3 ; 2 ; 10 ; A ; 4 | 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; K ; K
- main III : 6 ; 7 ; 2 ; A ; 5 ; K ; 3 | 9 ; 9 ; J ; J ; 4 ; 4
- main IV : A ; J ; K ; 3 ; 2 | J ; J ; 8 ; 8 ; Q ; Q ; 10 ; 10

Le joueur ayant la dame de cœur commence, il piochera une carte dans la main de l'adversaire se trouvant à sa gauche (dans l'exemple précédent la main 1 possédant la dame de cœur

Exemple :

- main IV pioche la carte 7 chez la main I.
- main I : pioche la carte 10 chez main II.
- main II : pioche la carte 7 chez main III.
- main III : pioche la carte 3 chez main IV.

les joueurs déposent leur(s) nouvelle(s) paire(s) dans leur tas respectifs jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes dans les mains.

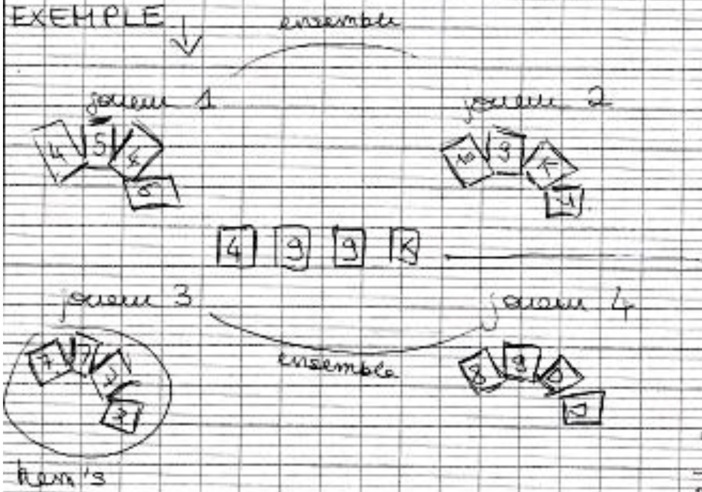
Tableau des scores :

N° des mains	Tour 1	Tour 2	Tour 3	Tour 4
main I	+ 4 pts	+ 10 pts	+ 14 pts	+ 13 pts
main II	+ 11 pts	+ 7 pt	+ 2 pts	+ 2 pts
main III	+ 8 pts	+ 3 pts	+ 2 pts	- 8 pts
main IV	+ 3 pts	0 pts	+ 7 pts	+ 10 pts

Jeu 2

Le kem's est un jeu qui se joue par équipe de 2. Les 2 ~~[illegible]~~ joueurs doivent avoir 4 cartes identiques. Lorsqu'un des 2 ont un kem's, il doit faire un signe à son équipier qu'ils ont choisi avant.

EXEMPLE



Cartes au centre les joueurs choisissent de nouvelles cartes puis quand ils pensent en vouloir en les change

K = ? D = ? V = ?

A chaque fois qu'une partie est gagnée, les deux gagnants piochent un papier avec un nombre positif ou négatif.
A la fin, on compte les points.

AYMERIC → (-30) + 0 + 14 = -16
ALEXANDRE → 77 + (-15) + 7 = 69
MAËLI → (-10) + 52 + 30 = 72
CLARA → (-22) + (-5) + 14 = (-11)

Avec cette méthode, j'estime que les élèves ont rapidement intégré le fait :
- que les lettres peuvent désigner des nombres dont on ne connaît pas forcément la valeur ;
- que l'on peut utiliser plusieurs lettres dans une expression littérale ;
- que l'on peut faire des calculs sans connaître la valeur de la lettre ;
- que la valeur de chaque expression peut changer si l'on attribue des valeurs différentes à la lettre.

Et à travers le jeu, les élèves ont eux-mêmes construit leurs propres exemples et testé les calculs. Ils ne pouvaient se tromper dans les résultats car ils étaient attentifs aux calculs (vigilants) du fait que chacun voulait gagner et surveiller les calculs pour ne pas être lésé à la fin de la partie.

Questions flash : Calcul littéral

Dans le même esprit, voici quelques questions flash que l'on pourrait poser de temps en temps.

Exercice 1

Dans un jeu de cartes, la carte J rapporte 11 points, la carte Q rapporte 12 points, la carte K rapporte 13 points et la carte A rapporte 15 points.
Quelle est la valeur des mains suivantes ?



Dans un jeu de cartes la carte V rapporte 30 points, la carte D rapporte 22 points et la carte R fait perdre au joueur 20 points.
Quelle est la valeur des mains suivantes ?




Exercice 2

Dans un jeu de cartes, voici la main d'un joueur.
1) En jouant il pose le 9 et prend un 7, il pose la dame et prend un roi.
Décrire sa nouvelle main.

2) Sachant que, dans ce jeu, le roi rapporte 13 points et la dame 12 points, quelle est la valeur de sa main ?
Comparez avec la valeur de la main initiale.

Exercice 3

Dans un jeu de cartes, voici la main d'un joueur.
1) En jouant il pose le 8 et prend une dame, il pose le valet et prend un roi. Décrire sa nouvelle main.

2) Sachant que, dans ce jeu, le roi rapporte 13 points, la dame 12 et le valet 11 points, quelle est la valeur de sa main ?
Comparez avec la valeur de la main initiale.

Exercice 4

Dans un jeu de cartes, voici la main d'un joueur :
1) En jouant il pose l'as et prend un roi, il pose le volet et prend une dame. Décrire sa nouvelle main.

2) Sachant que, dans ce jeu, le roi rapporte 30 points, la dame 20 points et le valet 15 points, quelle est la valeur de sa main ?
Comparez avec la valeur de la main initiale.

Exercice 5 (factorisation)

Décomposer les mains suivantes en sous-mains de cartes identiques :

Écrire de deux façons différentes la valeur de chaque main.